数理解析研究所講究録
294巻 1977年 62-94

N. Levinsonの結果のDirichletのL-関数への拡張について

上智大学理工　平野照比古

§0. 序

この小論において、Levinson[7]の結果をDirichletのL-関数へ拡張する。計算の方針はほとんど同じなので、重要な部分のみくわしい証明をつけることにする。結果の報告がHilano[8]に出ている。

§1. 基本的な$L(s,\chi)$の性質

ここでは、χは常にmodulo qの原始指標とする。まず、次の記法を使う。

$$a=\frac{1}{2}(1-\chi(-1)) \tag{1.1}$$

$$h(s)=h(s,\chi)$$
$$=\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-(s+a)/2}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \tag{1.2}$$

$$f'(s) = h'(s) / h(s) \tag{1.3}$$

$$\varepsilon(\chi) = \frac{(-i)^a}{q^{1/2}} \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e^{2\pi i m/q} \tag{1.4}$$

$$G(s) = G(s, \chi)$$

$$= L(s, \chi) + L'(s, \chi) / (f'(s) + f'(1-s)) \tag{1.5}$$

このとき、Hilano[8]で証明したように次の定理が成立する。

Theorem 1　Dを、

$$1/2 \leqq \sigma \leqq 3$$

$$T \leqq t \leqq T + U$$

なる領域とし、$N_G(D)$をD内における$G(s)$の零点の数とする。このとき、

$$N_0(T+U, \chi) - N_0(T, \chi)$$

$$\geqq \frac{U}{2\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - 2N_G(D) + O\left(\frac{U^2}{T} + 1\right)$$

が、成り立つ。

§2. 主定理

この小論における主定理は次のように述べられる。

Main Theorem

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\log q \leq (\log T)^{1-\varepsilon} \qquad (2.1)$$

とする。さらに、

$$U = \frac{T}{q \log^4 \frac{qT}{2\pi}}$$

とおく。このとき、$T > C_\varepsilon$ であれば、

$$N_0(T+U, \chi) - N_0(T, \chi) > \frac{1}{3}\left(N(T+U, \chi) - N(T, \chi)\right)$$

が成立する。

§3. $N_G(D)$ の評価のための準備

以下の節では、$N_G(D)$ の上からの評価をする。そのために

$$\psi(s) = \sum_{n \leq X} \frac{\chi(n) b_n}{n^s} \qquad (3.1)$$

とおいて、$N_{\psi G}(D)$ の評価をすれば十分である。ここで、次の仮定をおく。

$$L = \log \frac{qT}{2\pi}$$

$$X \geqq 1$$

$$\log X \ll L$$

$$|b_n| \leqq 1$$

$$b_1 = 1$$

（Levinsonの論文では、Xとb_nがはじめから与えられている。
しかし、ここでは当面の計算に必要な条件だけを与えておく。
b_nの定義は§9で与えられる。）

さて、$G(s)\Psi(s)$のDでの零点の個数を計算するために、
Littlewoodの定理と$L(s,\chi)$の近似関数等式を引用する。

Theorem 2 （Littlewood）

$F(s)$が、$\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$，$T \leqq t \leqq T+U$ で一価で、
有理型とする。さらに、$\sigma=\sigma_2$ 上で $F(s) \neq 0, \infty$
とする。$\nu(\alpha)$を

$$(\sigma_1 \leqq)\ \alpha < \sigma < \sigma_2, \quad T \leqq t \leqq T+U$$

内の零点の個数から極の個数を引いた数とする。このとき

$$2\pi \int_{\alpha}^{\sigma_2} \nu(\sigma)\, d\sigma = \int_T^{T+U} \left\{ \log|F(\alpha+it)| - \log|F(\sigma_2+it)| \right\} dt$$

$$+ \int_{\alpha}^{\sigma_2} \left\{ \arg F(\sigma+i(T+U)) - \arg F(\sigma+iT) \right\} d\sigma$$

が成立する。

Theorem 3 （$L(s,\chi)$の近似関数等式）

$|t| \geqq c > 0$、$\delta = O\left(\dfrac{1}{\log q|t|}\right)$ とする。

$$g_1(s,\chi) = \sum_{n \leqq \sqrt{\frac{g|t|}{2\pi}}} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{3.2}$$

$$g_2(s,\chi) = \sum_{n \leqq \sqrt{\frac{g|t|}{2\pi}}} \frac{\chi(n)\log n}{n^s} \tag{3.3}$$

このとき、$\sigma = \frac{1}{2} - \delta$ 、$\log g|t| = O(\frac{1}{\delta})$
に対して

$$L(s,\chi) = g_1(s,\chi) + \varepsilon(\chi)\frac{h(1-s)}{h(s)}g_1(1-s,\overline{\chi}) + O(g^{\frac{1}{4}}|t|^{-1/4})$$

$$L'(s,\chi) = -g_2(s,\chi) + \varepsilon(\chi)\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{h(1-s)}{h(s)}\right)\cdot g_1(1-s,\overline{\chi}) + \frac{h(1-s)}{h(s)}g_2(1-s,\overline{\chi})\right\} + O(g^{1/4}|t|^{-1/4}\log g|t|)$$

が成立する。
（この証明は、たとえば Lavrik [2,3] か、もしくはそのくわしい解説である本橋 [4] を参照のこと。もちろん、ここでは特殊な s に対してのみ引用してある。）

さて、
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{h(1-s)}{h(s)}\right) = -\frac{h(1-s)}{h(s)}(f'(s) + f'(1-s))$$

であるから、上のような s については $G(s)$ は簡単な計算により

$$G(s) = g_1(s,\chi) + \frac{1}{(f'(s)+f'(1-s))}\left\{-g_2(s,\chi)+\varepsilon(\chi)\frac{h(1-s)}{h(s)}g_2(1-s,\bar{\chi})\right\}$$

$$+O(g^{\frac{1}{4}}|t|^{-\frac{1}{4}}) \qquad (3.4)$$

さて、$\delta>0$ とするとき、Littlewood の定理を

$$\alpha = \frac{1}{2}-\delta\ ,\quad \sigma_2 = 3\ ,\quad F = \psi G$$

として応用すれば、定理の仮定は $\zeta(s)$ の場合と同様に示せるから、

$$2\pi\delta N_G(D) \leq \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{3} \nu(\sigma)\,d\sigma$$

$$= \int_T^{T+U} \log|(\psi G)(\tfrac{1}{2}-\delta+it)|\,dt + O(\tfrac{U}{L})$$

$$\leq \frac{U}{2}\log\left\{\frac{1}{U}\int_T^{T+U}|(\psi G)(\tfrac{1}{2}-\delta+it)|^2 dt\right\} \qquad (3.5)$$

が得られる。Stirling の公式により、$\sigma=\frac{1}{2}-\delta$，$t>0$ に対し

$$\frac{h(1-s)}{h(s)} = \theta(t) + O(\frac{1}{t}) \qquad (3.6)$$

と書ける。ここに

$$\theta(t) = \left(\frac{gt}{2\pi}\right)^{\delta} e^{-\frac{\pi}{2}(a-\frac{1}{2})i}\, e^{-it\log\frac{gt}{2\pi e}} \qquad (3.7)$$

である。さらに、

$$f'(s)+f'(1-s)=\log\frac{qt}{2\pi}+O\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

であり、

$$\left|g_2\left(\frac{1}{2}\pm\delta\mp it,\bar{\chi}\right)\right|=O\left((q|t|)^{\frac{1}{4}}\log q|t|\right)$$

であるから、（3.4），（3.6）により

$$G\left(\frac{1}{2}-\delta+it\right)$$
$$=g_1\left(\frac{1}{2}-\delta+it,\chi\right)+\frac{1}{\log\frac{qt}{2\pi}}\left(-g_2\left(\frac{1}{2}-\delta+it,\chi\right)+\varepsilon(\chi)\theta(t)g_2\left(\frac{1}{2}+\delta-it,\bar{\chi}\right)\right)$$
$$+O\left(q^{\frac{1}{4}}|t|^{-\frac{1}{4}}\right)$$
$$=H\left(\frac{1}{2}-\delta+it,\chi\right)+\underbrace{H_1\left(\frac{1}{2}-\delta+it,\chi\right)}_{\text{（剰余項）}}\qquad(\text{Say!})$$

となる。これを（3.5）に代入すると、Levinsonの場合と同様に、

$$\int_T^{T+U}\left|\psi G\left(\frac{1}{2}-\delta+it\right)\right|^2dt$$
$$=\int_T^{T+U}|\psi H|^2dt+O\left(U^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}}T^{-\frac{1}{4}}(UL+X)^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}(UL+X)\right)\tag{3.8}$$

を得る。（ただし、$\int_T^{T+U}|\psi H|^2dt=O(U)$ を用いた。これを示すのが、以下の計算の目的でもある。）

Hの定義より、

$$\int_T^{T+U} |\psi H(\tfrac{1}{2}-\delta+it,\chi)|^2 dt$$

$$= I_{11} + I_{22} + I_{33} - 2\,\mathrm{Re}\, I_{12} - 2\,\mathrm{Re}\, I_{23} + 2\,\mathrm{Re}\, I_{13} \tag{3.9}$$

と書ける。ここに

$$I_{11} = \int_T^{T+U} |(\psi g_1)(\tfrac{1}{2}-\delta+it,\chi)|^2 dt$$

$$I_{22} = \int_T^{T+U} |(\psi g_2)(\tfrac{1}{2}-\delta+it,\chi)|^2 \frac{dt}{\log^2 \frac{qt}{2\pi}}$$

$$I_{33} = \int_T^{T+U} |\theta(t)|^2 |(\psi g_2)(\tfrac{1}{2}+\delta-it,\overline{\chi})|^2 \frac{dt}{\log^2 \frac{qt}{2\pi}}$$

$$I_{12} = \int_T^{T+U} (|\psi|^2 \cdot g_1 g_2)(\tfrac{1}{2}-\delta+it,\chi) \frac{dt}{\log \frac{qt}{2\pi}}$$

$$I_{13} = \int_T^{T+U} \overline{\varepsilon(\chi)}\, |\psi|^2\, \overline{\theta(t)}\, g_1(\tfrac{1}{2}-\delta+it,\chi)\, \overline{g_2(\tfrac{1}{2}+\delta-it,\overline{\chi})} \frac{dt}{\log \frac{qt}{2\pi}}$$

$$I_{23} = \int_T^{T+U} \overline{\varepsilon(\chi)}\, |\psi|^2\, \overline{\theta(t)}\, g_2(\tfrac{1}{2}-\delta+it,\chi)\, \overline{g_2(\tfrac{1}{2}+\delta-it,\overline{\chi})} \frac{dt}{\log^2 \frac{qt}{2\pi}}$$

とおいた。

§4. Lemmas

この節では、あとで使われるいくつかの Lemma を述べる。

証明は Levinson [7] とほとんど同じなので省略する。(各 Lemma のあとに対応する Lemma の番号をつける。)

Lemma 4.1

$0<|\delta|<\dfrac{c}{\log Y}$, $Y>c'q$ (c, c' はある定数)なる δ に対して

$$\sum_{\substack{1\le j\le Y\\(j,q)=1}}\frac{1}{j^{1-2\delta}}=\frac{\varphi(q)}{q}\left(\frac{Y^{2\delta}}{2\delta}-\frac{1}{2\delta}\right)+c_1(q,\delta)+O\left(\varphi(q)Y^{-1+2\delta}\right)$$

$$\sum_{\substack{1\le j\le Y\\(j,q)=1}}\frac{\log j}{j^{1-2\delta}}=\frac{\varphi(q)}{q}\left(\frac{Y^{2\delta}}{2\delta}\log Y-\frac{Y^{2\delta}}{(2\delta)^2}+\frac{1}{(2\delta)^2}\right)+c_2(q,\delta)+O\left(\varphi(q)Y^{-1+2\delta}\log Y\right)$$

$$\sum_{\substack{1\le j\le Y\\(j,q)=1}}\frac{\log^2 j}{j^{1-2\delta}}=\frac{\varphi(q)}{q}\left(\frac{Y^{2\delta}}{2\delta}\log^2 Y-2\frac{Y^{2\delta}}{(2\delta)^2}\log Y+2\frac{Y^{2\delta}}{(2\delta)^3}-\frac{1}{(2\delta)^3}\right)+c_3(q,\delta)+O\left(\varphi(q)Y^{-1+2\delta}\log^2 Y\right)$$

が成立する。ここに $c_k(q,\delta)$ は q と δ のみによる定数で

$$\left|c_k(q,\delta)\right|\ll\frac{1}{q^{k-1}}\left(\log\log q\right)^2$$

となる。(Lemma 3.1 , 3.9)

Lemma 4.2

$m=0,1,2$ とし．Aを十分大きな数で

$$A^\delta = O(1)$$

とする。このとき

$$A \leqq r \leqq B \leqq A + A/\log A$$

なるrに対して

$$\int_A^B \exp\left(it\log\frac{t}{er}\right)\left(\frac{qt}{2\pi}\right)^\delta \frac{dt}{\log^m \frac{qt}{2\pi}}$$

$$= q^\delta (2\pi)^{\frac{1}{2}-\delta} r^{\frac{1}{2}+\delta} e^{-ir+\pi i/4} \Big/ \log^m \frac{rq}{2\pi} + q^\delta E(r) / \log^m qA$$

となる。ここに

$$E(r) = O(1) + O\left(\frac{A}{|A-r|+A^{1/2}}\right) + O\left(\frac{B}{|B-r|+B^{1/2}}\right)$$

である。上記以外のrに対しては、上の積分は

$$q^\delta E(r) / \log^m qA$$

と評価される。（Lemma 3.4，3，5）

Lemma 4.3

Kを
$$C_1 \leqq (u+\beta_1)(v+\beta_2) \leqq C_2$$
$$C_3(u+\beta_1) \leqq (v+\beta_2) \leqq C_4(u+\beta_1)$$

で与えられる領域とする。ここに、$c_1, c_3 > 0$, $\beta_1, \beta_2 \geqq 0$ とする。$f \in C^1(K)$ とし、さらに

$$|K| : K\text{の面積}$$

$$u_M = \max_{(u,v)\in K} u$$

$$v_M = \max_{(u,v)\in K} v$$

$$|f|_M = \max_{(u,v)\in K} |f| \qquad \text{etc.}$$

とおく。このとき

$$\sum_{(m,n)\in K} f(m,n) = \iint_K f(u,v)\,du\,dv + J$$

となり、

$$|J| \ll |f|_M (u_M + v_M + 1) + (|K| + v_M)\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|_M + |K|\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|_M$$

が成立する。(Lemma 3. 7)

§5. Notation

以後の節での簡単のため、次の記法を用いる。

$$\tau = \left(\frac{gT}{2\pi}\right)^{1/2}, \quad \tau_1 = \left(\frac{g(T+U)}{2\pi}\right)^{1/2}$$

k_1, k_2 : ψ から現われる変数

j_1, j_2 : g_1 か g_2 から現われる変数

さらに、 $k = (k_1, k_2)$

とおき、 $k_1 = kA_1 \quad , \quad k_2 = kA_2$

$$A_M = \max(A_1, A_2)$$

$$k_M = \max(k_1, k_2)$$

$$k_m = \min(k_1, k_2)$$

$$T_1 = \max\left(T, \frac{2\pi\xi_1^2}{q}, \frac{2\pi\xi_2^2}{q}\right)$$

とおく。さらに、

$$X \leq \tau/(qL)$$

$$q \leq T$$

と仮定する。

また、$\sum^*$でqと互いに素なξやkにわたる和を表わすものとする。

§6. I_{11}、I_{22}、I_{33} と I_{12} の評価

これらの積分は、Lemma 4.1 を用いて同様の方法で計算できる。

Proposition 6.1

$$I_{11} = \frac{\varphi(q)}{q} U P_0(1, 1-2\delta) \frac{\tau^{2\delta}}{2\delta} - \left(\frac{\varphi(q)}{q} \cdot \frac{1}{2\delta} - c_1^*\right) U S_0$$

$$+ O(R)$$

$$I_{22} = \frac{\varphi(\xi)}{\xi} U \tau^{2\delta} \Big(\frac{2}{(2\delta)^3 L^2} P_0(1, 1-2\delta) - \frac{1}{2(2\delta)^2 L} P_0(1, 1-2\delta)$$

$$- \frac{1}{(2\delta)^2 L^2} P_1(1, 1-2\delta) + \frac{1}{2(2\delta) L} P_1(1, 1-2\delta) \Big)$$

$$+ \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \frac{U}{L^2} \Big\{ -\Big(\frac{2}{(2\delta)^3} - \frac{\xi}{\varphi(\xi)} C_3^* \Big) S_0 + \Big(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{\xi}{\varphi(\xi)} 2 C_2^* \Big) S_1$$

$$- \Big(\frac{1}{2\delta} - \frac{\xi}{\varphi(\xi)} C_1^* \Big) S_2 \Big\} + O(R)$$

$$I_{33} = \frac{\varphi(\xi)}{\xi} U \tau^{2\delta} \Big\{ - \frac{2}{(2\delta)^3 L^2} P_0(1-2\delta, 1) - \frac{1}{2(2\delta)^2 L} P_0(1-2\delta, 1)$$

$$- \frac{1}{(2\delta)^2 L^2} P_1(1-2\delta, 1) - \frac{1}{2(2\delta) L} P_1(1-2\delta, 1) \Big\}$$

$$+ \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \frac{U \tau^{4\delta}}{L^2} \Big\{ \Big(\frac{2}{(2\delta)^3} + \frac{\xi}{\varphi(\xi)} C_6^* \Big) S_0' + \Big(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{\xi}{\varphi(\xi)} 2 C_5^* \Big) S_1'$$

$$+ \Big(\frac{1}{2\delta} + \frac{\xi}{\varphi(\xi)} C_4^* \Big) S_2' \Big\} + O(R)$$

$$2 \operatorname{Re} I_{12} = I_{12} + I_{21}$$

$$= \frac{\varphi(\xi)}{\xi} U \tau^{2\delta} \Big\{ - \frac{2 P_0(1, 1-2\delta)}{(2\delta)^2 L} + \frac{2 P_0(1, 1-2\delta)}{2(2\delta)} + \frac{P_1(1, 1-2\delta)}{(2\delta) L} \Big\}$$

$$+ \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \frac{U}{L} \Big\{ \Big(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{2\xi}{\varphi(\xi)} C_2^* \Big) S_0 + 2 \Big(- \frac{1}{2\delta} + \frac{\xi}{\varphi(\xi)} C_1^* \Big) S_1 \Big\} + O(R)$$

ここに、
$$R = X\tau L + \frac{U^2}{T}L^3 + \varphi(q)\frac{XU}{\tau}L^3$$

であり、
$$S_0 = \sum_{1\le k_1, k_2 \le X}^{*} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{1-2\delta}}{(k_1 k_2)^{1-2\delta}}$$

$$S_1 = \sum_{1\le k_1, k_2 \le X}^{*} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{1-2\delta}}{(k_1 k_2)^{1-2\delta}} \log(k_1/k)$$

$$S_2 = \sum_{1\le k_1, k_2 \le X}^{*} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{1-2\delta}}{(k_1 k_2)^{1-2\delta}} \log(k_1/k)\log(k_2/k)$$

$$P_0(\alpha,\beta) = \sum_{1\le k_1, k_2 \le X}^{*} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M^{\alpha}\ k_m^{\beta}}$$

$$P_1(\alpha,\beta) = \sum_{1\le k_1, k_2 \le X}^{*} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M^{\alpha}\ k_m^{\beta}} \log\left(\tau\frac{k_m}{k_M}\right)$$

である。ここにおける C^* は、Lemma 4.1 と同様な不等式をみたす。

§7. I_{13} と I_{23} の評価

I_{13} の定義より、
$$I_{13} = \overline{\varepsilon(\chi)} \int_T^{T+U} \sum_{\substack{1\le k_1, k_2 \le X \\ 1\le j_1, j_2 \le (\frac{qT}{2\pi})^{\frac{1}{2}}}} \frac{b_{k_1} b_{k_2} \chi(k_1 j_1 j_2)\overline{\chi}(k_2)\log j_2}{(k_1 k_2 j_1)^{1/2-\delta}\, j_2^{1/2+\delta}}$$
$$\times \frac{(\frac{qt}{2\pi})^{\delta}}{\log\frac{qt}{2\pi}} e^{\frac{\pi}{2}(a-\frac{1}{2})i + it\log\frac{k_2 q t}{2\pi e k_1 j_1 j_2}}\, dt$$

$$= \overline{\varepsilon(\chi)}\, e^{\frac{\pi}{2}(a-\frac{1}{2})i} \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq X \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq \tau_1}} \frac{b_{k_1} b_{k_2} \chi(k_1 j_1 j_2) \overline{\chi}(k_2) \log j_2}{(k_1 k_2 j_1)^{\frac{1}{2}-\delta}\, j_2^{\frac{1}{2}+\delta}}$$

$$\times \int_T^{T+U} \left(\frac{gt}{2\pi}\right)^{\delta} \frac{e^{it \log \frac{k_2\, gt}{2\pi e\, k_1 j_1 j_2}}}{\log \frac{gt}{2\pi}}\, dt$$

$$= I_{13}^{(0)} + I_{13}^{(R)} \qquad (7.1)$$

ここに $I_{13}^{(R)}$ は、Lemma 4.2 を内側の積分に適用したときに現われる剰余項の和を表わす。この項は同様な計算で評価できて、

$$I_{13}^{(R)} \ll \varphi(g)\, g^{-\frac{1}{2}} X L^3$$

となる。一方、

$$I_{13}^{(0)} = \overline{\varepsilon(\chi)}\, e^{\frac{\pi}{2}(a-\frac{1}{2})i} \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq X \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq \tau_1}}{}' \frac{b_{k_1} b_{k_2} \chi(k_1 j_1 j_2) \overline{\chi}(k_2) \log j_2}{(k_1 k_2 j_1)^{\frac{1}{2}-\delta}\, j_2^{\frac{1}{2}+\delta}}$$

$$\times g^{\delta} (2\pi)^{\frac{1}{2}-\delta} \left(\frac{2\pi j_1 j_2 k_1}{g k_2}\right)^{\frac{1}{2}+\delta} e^{\frac{2\pi i k_1 j_1 j_2}{g k_2} + \pi i} \Big/ \log \frac{j_1 j_2 k}{k_2}$$

$$(7.2)$$

となる。ここで $\sum'$ は

$$T_1 \leq \frac{2\pi j_1 j_2 k_1}{g k_2} \leq T + U \qquad (7.3)$$

にわたる和を表わす。この条件は、

$$\frac{gTk_2}{2\pi k_1} \leqq j_1 j_2 \leqq \frac{g(T+U)k_2}{2\pi k_1} \qquad (7.4)$$

$$\frac{j_1 k_2}{k_1} \leqq j_2 \leqq \frac{j_1 k_1}{k_2} \qquad (7.5)$$

と同値である。(7.5)より、

$$k_2 \leqq k_1 \qquad (7.6)$$

と仮定してよい。

さて、まず j_2, k_1, k_2 を

$$\sum\nolimits_I = \sum_{\gamma_1 \leqq j_1 \leqq \gamma_2}{}' \chi(j_1) e^{-\frac{2\pi i j_1 j_2 k_1}{g k_2}} \qquad (7.7)$$

なる和を考える。この和を $j_1 \equiv l_1 \pmod{g}$ なる関係で、g 個の和にわけ、それらについて同様な方法を用いる。

l_2 $(0 \leqq l_2 < A_2)$ を、

$$j_2 A_1 \equiv l_2 \quad \mathrm{mod}\ A_2$$

で定義すると、$l_2 \neq 0$ のとき

$$\sum\nolimits_I = O\left(\varphi(g)\left(\frac{A_2}{l_2} + \frac{A_2}{A_2 - l_2}\right)\right)$$

となる。したがって部分和の方法により、$l_2 \neq 0$ のとき、

$$\sum_{j_1}{}' \frac{j_1^{2\delta}}{\log(j_1 j_2 k_1 / k_2)} e^{-\frac{2\pi i j_1 j_2 k_1}{g k_2}}$$

$$= O\left(\varphi(g)\left(\frac{A_2}{l_2} + \frac{A_2}{A_2 - l_2}\right)\right)$$

$(A_1, A_2)=1$ であるから、$j_2 A_1 \not\equiv 0 \mod A_2$ であるための必要十分条件は $j_2 \not\equiv 0 \mod A_2$ である。

$$\sum_{\substack{j_1, j_2 \\ j_2 A_1 \not\equiv 0 \mod A_2}}' j_1^{2\delta} \log j_2 \, \chi(j_1 j_2) e^{-\frac{2\pi i j_1 j_2 k_1}{q k_2}} \Big/ \log \frac{j_1 j_2 k_1}{k_2}$$

$$= O\left(\left(\frac{\tau_1}{A_2}+1\right) \varphi(q) \sum_{l_2=1}^{A_2-1} \left(\frac{A_2}{l_2}+\frac{A_2}{A_2-l_2}\right)\right)$$

$$= O(\varphi(q)\tau L)$$

となる。したがって、これらの項の $I_{13}^{(0)}$ への寄与は、高々

$$O(\varphi(q) q^{-\frac{1}{2}} \tau X L^2)$$

である。ゆえに、

$$I_{13}^{(0)} = I_{13}^{(1)} + O(q^{\frac{1}{2}} \tau X L^2) \qquad (7.8)$$

を得る。ここに、

$$I_{13}^{(1)} = \overline{\varepsilon(\chi)}\, q^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2}ai} 2\pi \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq X \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq \tau_1 \\ j_2 A_1 \equiv 0 \mod A_2}}' \frac{b_{k_1} b_{k_2} \chi(j_1 j_2 k_1) \overline{\chi}(k_2) \log j_2}{k_1^{-2\delta} k_2 j_1^{-2\delta}}$$

$$\times e^{-\frac{2\pi i j_1 j_2 k_1}{q k_2}} \Big/ \log \frac{j_1 j_2 k_1}{k_2}$$

$$= \overline{\varepsilon(\chi)}\, q^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2}ai} 2\pi \sum_{1 \leq k_2 \leq k_1 \leq X}^{*} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k_1^{2\delta}}{k_2}$$

$$\times \sum_{(j_1, j)\in K} j_1^{2\delta} \frac{\log jA_2}{\log j_1 j A_1} \chi(A_1 j_1 j) e^{-\frac{2\pi i j_1 j A_1}{g}}$$

であり，Kは，

$$\frac{gT}{2\pi A_1} \leqq uv \leqq \frac{g(T+U)}{2\pi A_1}$$

$$\frac{u}{A_1} \leqq v \leqq \frac{uA_1}{A_2^2}$$

で与えられる領域である。（上の注意により $j_2 = jA_2$ とおいた。）　$(j_1, j)\in K$ に対し，

$$\frac{1}{\log j_1 j A_1} - \frac{1}{L} = O\left(\frac{U}{TL^2}\right)$$

であるから，Lemma 3.6 を用いて，

$$I_{13}^{(1)} = \frac{1}{L} I_{13}^{(2)} + O\Big(\frac{U}{TL^2} g^{-\frac{1}{2}} \sum_{k_1, k_2} \frac{1}{k_2} \sum_{(j_1, j)\in K} L\Big)$$

$$= \frac{1}{L} I_{13}^{(2)} + O\Big(g^{\frac{1}{2}} \frac{U^2}{T} L^3 + g^{-\frac{1}{2}} \frac{UX}{T^{\frac{1}{2}}}\Big) \qquad (7.9)$$

となる。ここで

$$I_{13}^{(2)} = \overline{\varepsilon(\chi)}\, g^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2} a i}\, 2\pi \sum_{1\leqq k_2 \leqq k_1 \leqq X}^{*} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k_1^{2\delta}}{k_2}$$

$$\times \sum_{(j_1, j)\in K} j_1^{2\delta} \log jA_2\, \chi(A_1 j_1 j)\; e^{-\frac{2\pi i j_1 j A_1}{g}} \qquad (7.10)$$

$I_{13}^{(3)}$ を上式の一番内側の和とし、

$$I_{13}^{(4)}(l_1, l) = \sum_{\substack{j_1 \equiv l_1 \bmod q \\ j \equiv l \bmod q \\ (j_1, j) \in K}} j_1^{2\delta} \log j A_2 \qquad (7.11)$$

とおくと、

$$I_{13}^{(3)} = \sum_{\substack{0 \leqq l_1 \leqq q-1 \\ 0 \leqq l \leqq q-1}} I_{13}^{(4)}(l_1, l) \chi(A_1 l_1 l) e^{\frac{2\pi i l_1 l A_1}{q}} \qquad (7.12)$$

となる。ここで $I_{13}^{(4)}$ の計算をする。

$$j_1 = j_1^* q + l_1$$

$$j = j^* q + l \qquad (7.13)$$

とおく。このとき、j_1^*, j^* に関する条件は

$$(j_1^*, j^*) \in K(l_1, l)$$

である。ただし、$K(l_1, l)$ とは、

$$\frac{qT}{2\pi A_1} \leqq (qu + l_1)(qv + l) \leqq \frac{q(T+U)}{2\pi A_1}$$

$$\frac{qu + l}{A_1} \leqq qv + l \leqq \frac{qu + l_1}{A_2^2} A_1$$

で定義された領域である。Lemma 4.2 を $I_{13}^{(4)}(l_1, l)$ に適用すれば、

$$I_{13}^{(4)}(l_1, l) = \sum_{(j_1^*, j) \in K(l_1, l)} (q j_1^* + l_1)^{2\delta} \log(q j^* + l) A_2$$

$$= \iint_{K(l_1, l)} (qu+l_1)^{2\delta} \log(qv+l) A_2 \, du \, dv$$

$$+ O(R(l_1, l)) \qquad (7.14)$$

となる。前の記法をそのまま用いれば、

$$|u_M| \ll \frac{T}{q}$$

$$|v_M| \ll \tau / qA_2$$

$$|f_M| \ll L$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|_M \ll qA_1/(\tau A_2)$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|_M \ll qA_1/\tau$$

であることがすぐわかる。また、

$$\sum_{\substack{0 \leqq l_1 \leqq q \\ 0 \leqq l \leqq q}} K(l_1, l) = \frac{1}{q^2} \sum_{\substack{0 \leqq l_1 \leqq q \\ 0 \leqq l \leqq q}} \iint_{(u,v) \in K} du \, dv$$

$$= |K|$$

$$\leqq \frac{qU}{A_1} L$$

であるから、剰余項の全体への寄与は、

$$\ll q^{-\frac{1}{2}} \tau X L^2 + \frac{q^{\frac{1}{2}} UXL}{\tau} + q^{\frac{3}{2}} X^2 \qquad (7.15)$$

となる。一方、

$$\iint_{K(l_1, l)} (qu+l_1)^{2\delta} \log(qv+l) A_2 \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{q^2} \iint_K u^{2\delta} \log v \, A_2 \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{q^2} F$$

であり．Fは l_1 や l に無関係である。したがって．$(A_1 l_1, q)=1$ に注意して．

$$I_{13}^{(3)} = \frac{F}{q^2} \sum_{\substack{0 \leqq l_1 < q \\ 0 \leqq l < q}}^{*} \chi(A_1 l_1 l) e^{-2\pi i l_1 l A_1 / q}$$

$$= \frac{F}{q^2} \varphi(q) \sum_{m=1}^{q\,*} \chi(-m) \, e^{2\pi i m / q}$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q^2} F (-1)^a \sum_{m=1}^{q\,*} \chi(m) \, e^{2\pi i m / q}$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q^{3/2}} i^{-a} \varepsilon(\chi) F$$

となる。したがって．(7.10)に代入して．

$$I_{13}^{(2)} = 2\pi \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{1 \leqq k_2 \leqq k_1 \leqq X}^{*} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k_1^{2\delta}}{k_2} F$$

$$+ O\left(q^{\frac{1}{2}} \tau X L^2 + \frac{q^{\frac{1}{2}} U X L}{\tau} + q^{\frac{3}{2}} X^2 \right)$$

また．

$$F = \frac{1}{8\pi} \tau^{2\delta} q U \left(- \frac{A_2^{2\delta} L}{\delta A_1^{1+2\delta}} + \frac{2}{\delta A_1} \log \tau \frac{k_2}{k_1} + \frac{1}{\delta^2 A_1} - \frac{A_2^{2\delta}}{\delta^2 A_1^{1+2\delta}} \right)$$

$$+ O\left(\frac{UL}{T}\right)$$

となる。$A_M = A_1$, $k_M = k_1$ に注意すれば、

$$2\,\mathrm{Re}\, I_{13}^{(2)} = \frac{1}{4}\frac{\varphi(g)}{g}\tau^{2\delta} U \Big(-\frac{L}{\delta} P_0(1, 1-2\delta) - \frac{1}{\delta^2} P_0(1, 1-2\delta)$$

$$+ \frac{1}{\delta^2} P_0(1-2\delta, 1) + \frac{2}{\delta} P_1(1-2\delta, 1)\Big)$$

$$+ O\left(g^{\frac{1}{2}} \tau X L^2 + \frac{g^{\frac{1}{2}} U X L^2}{\tau} + g^{\frac{3}{2}} X^2 \right)$$

となる。(7.1), (7.8), (7.9) とこの式により、I_{13} の計算が終わる。I_{23} も同様に計算できて、

<u>Proposition 7.1</u>

$$2\,\mathrm{Re}\, I_{13} = I_{13} + I_{31}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\varphi(g)}{g}\tau^{2\delta} U \Big(-\frac{1}{\delta} P_0(1, 1-2\delta) - \frac{1}{\delta^2 L} P_0(1, 1-2\delta)$$

$$+ \frac{1}{\delta^2 L} P_0(1-2\delta, 1) + \frac{2}{\delta L} P_1(1-2\delta, 1)\Big)$$

$$+ O\left(g^{\frac{1}{2}} X \tau L^3 + g^{\frac{1}{2}} \frac{U^2 L^3}{T} + \frac{g^{\frac{1}{2}} U X L^2}{\tau} + g^{\frac{3}{2}} X^2 \right)$$

$$2\,\mathrm{Re}\, I_{23} = I_{23} + I_{32}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\varphi(q)}{q}\tau^{2\delta}U\Big(-\frac{1}{\delta^3L^2}\big(P_0(1-2\delta,1)-P_0(1,1-2\delta)\big)$$

$$+\frac{1}{2\delta^2L}\big(P_0(1-2\delta,1)+P_0(1,1-2\delta)\big)$$

$$-\frac{1}{\delta^2L^2}\big(P_1(1-2\delta,1)+P_1(1,1-2\delta)\big)$$

$$+\frac{1}{\delta L}\big(P_1(1-2\delta,1)-P_1(1,1-2\delta)\big)\Big)$$

$$+O\Big(q^{\frac{1}{2}}X\tau L^3+q^{\frac{1}{2}}\frac{U^2}{T}L^3+\frac{q^{\frac{1}{2}}UXL^2}{\tau}+q^{\frac{3}{2}}X^2\Big)$$

§8. I の和の値

Prop 6.1 と 7.1 により、すべての主要項は、形の上では、[7] のときと $\frac{\varphi(q)}{q}$ だけ違うことがわかる。したがって、ζ-関数のときと同様にすべての P の項は消える。ゆえに、

$$\int_T^{T+U}\left|\psi H\left(\tfrac{1}{2}-\delta+it,\chi\right)\right|^2dt$$

$$=\frac{\varphi(q)}{q}U\Big\{s_0\Big[-\Big(\frac{1}{2\delta}-\frac{q}{\varphi(q)}C_1^*\Big)-\frac{1}{L^2}\Big(\frac{2}{(2\delta)^3}-\frac{q}{\varphi(q)}C_3^*\Big)$$

$$-\frac{1}{L}\Big(\frac{2}{(2\delta)^2}+\frac{2q}{\varphi(q)}C_2^*\Big)\Big]$$

$$+s_1\Big[\frac{1}{L^2}\Big(\frac{2}{(2\delta)^2}+\frac{2q}{\varphi(q)}C_2^*\Big)-\frac{2}{L}\Big(-\frac{1}{2\delta}+\frac{q}{\varphi(q)}C_1^*\Big)\Big]$$

$$+ S_2 \left[-\frac{1}{L^2}\left(\frac{1}{2\delta} - \frac{q}{\varphi(q)} C_1^*\right)\right] + S_0' \frac{\tau^{4\delta}}{L^2}\left(\frac{2}{(2\delta)^3} + \frac{q}{\varphi(q)} C_6^*\right)$$

$$+ S_1' \frac{\tau^{4\delta}}{L^2}\left(\frac{2}{(2\delta)^2} + \frac{2q}{\varphi(q)} C_5^*\right) + S_2' \frac{\tau^{4\delta}}{L^2}\left(\frac{1}{2\delta} + \frac{q}{\varphi(q)} C_4^*\right)$$

$$+ O\left(q^{\frac{1}{2}} X \tau L^3 + q^{\frac{1}{2}} U^2 L^3 / T + \varphi(q) U X L^2/\tau + q^{\frac{3}{2}} X^2 \right)$$

§9. Sの計算

はじめに、次の関数を定義しておく。

$$F(n, w) = \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p^w}\right)$$

$$F_1(n, w) = \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p^w}\right)$$

$$f_0(c, d) = \sum_{1 \leqq n \leqq X/d}^{*} \frac{b_{dn}}{n^{1-c\delta}}$$

$$f_1(c, d) = \sum_{1 \leqq n \leqq X/d}^{*} \frac{b_{dn} \log \frac{X}{dn}}{n^{1-c\delta}}$$

すると同様の方法で、次のLemmaが示せる。

<u>Lemma 9.1</u>

$$S_0 = \sum_{1 \leqq d \leqq X}^{*} \frac{F(d, 1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} f_0^2(2, d)$$

$$S_1 = \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{F(d,1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} f_0(2,d)\left(\log\frac{X}{d} f_0(2,d) - f_1(2,d)\right)$$

$$- \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{F(d,1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\sum_{p|d} \frac{\log p}{p^{1-2\delta}-1}\right) f_0^2(2,d)$$

$$S_2 = \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{F(d,1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\log\frac{X}{d} f_0(2,d) - f_1(2,d)\right)^2$$

$$-2 \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{F(d,1-2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\sum_{p|d} \frac{\log p}{p^{1-2\delta}-1}\right)$$

$$\times \left(\log\frac{X}{d} f_0(2,d) - f_1(2,d)\right) f_0(2,d)$$

$$+ \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{1}{d^{1-2\delta}} \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(d,1-2\delta) f_0^2(2,d)$$

$$S_0' = \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{F(d,1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} f_0^2(0,d)$$

$$S_1' = \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{F(d,1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} f_0(0,d)\left(\log\frac{X}{d} f_0(0,d) - f_1(0,d)\right)$$

$$- \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{F(d,1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\sum_{p|d} \frac{\log p}{p^{1+2\delta}-1}\right) f_0^2(0,d)$$

$$S_2' = \sum_{1\le d\le X}^{*} \frac{F(d,1+2\delta)}{d^{1-2\delta}} \left(\log\frac{X}{d} f_0(0,d) - f_1(0,d)\right)^2$$

$$-2\sum_{1\leqq d\leqq X}^{*}\frac{F(d,1+2\delta)}{d^{1-2\delta}}\Big(\sum_{p|d}\frac{\log p}{p^{1+2\delta}-1}\Big)$$

$$\times\Big(\log\frac{X}{d}f_0(0,d)-f_1(0,d)\Big)f_0(0,d)$$

$$+\sum_{1\leqq d\leqq X}^{*}\frac{1}{d^{1-2\delta}}\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(d,1+2\delta)f_0^2(0,d)$$

さて、これから f_0 と f_1 の計算をしなくてはならないので、b_n の形を決めておかねばならない。ここでは、Levinson と同様に、

$$b_n=\frac{\mu(n)}{n^{\delta}}\frac{\log\frac{X}{n}}{\log X}$$

とおく。すると、$l=0,1$ に対して

$$f_l(c,d)=\frac{\mu(d)}{d^{\delta}}\frac{1}{\log X}\sum_{\substack{1\leqq n\leqq X/d\\(n,dq)=1}}\frac{\mu(n)\log^{l+1}\frac{X}{nd}}{n^{1-(c-1)\delta}}$$

となる。そこで

$$f^*(Y,l)=\sum_{\substack{1\leqq n\leqq Y\\(n,dq)=1}}\frac{\mu(n)\log^{l}\frac{Y}{n}}{n^{1-c\delta}}$$

を計算すればよい。

<u>Lemma 9.2</u>

$c=\pm1$, $\log Y\ll L$ に対して、ある定数 c_1 が存在し、

$$f^*(Y, 1) = \frac{1 - c\delta \log Y}{F(dq, 1-c\delta)} + O\left(\frac{\log^2 L}{L} + Y^{\sigma_0 - 1} \log^{c_1} L\right)$$

$$f^*(Y, 2) = \frac{2\log Y - c\delta \log^2 Y}{F(dq, 1-c\delta)} + O\left(\log^3 L + Y^{\sigma_0 - 1} \log^{c_1} L\right)$$

となる。ここに、σ_0は、

$$\sigma \geqq 1 - 2(1-\sigma_0) \quad , \quad |t| \leqq L^2$$

で、$\zeta(s)$ が零点をもたないようなものでとる。これらの評価は q や L によらない。

（注意）

σ_0はCを定数として

$$\sigma_0 = 1 - \frac{c}{\log L}$$

ととれる。Levinson [7] では、$f^*(Y, l)$ の剰余項は

$$O\left(\frac{\log^2 L}{L} + F_1(dq, \sigma_0) Y^{\sigma_0 - 1}\right)$$

の形をしている。したがって、これから上の剰余項が導びかれればよい。実際、$0 < \alpha < \frac{1}{3}$ に対し、

$$\log F_1(n, 1-\alpha) \leqq \sum_{p|n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} + O(1)$$

$$\leqq \sum_{p \leqq (\log n)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{1}{p^{1-\alpha}} + O\left(\frac{\omega(n)}{\log n} + 1\right)$$

$$\leqq (\log n)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \log\log\log n + O(1)$$

したがって．$1-\alpha = \sigma_0$ に対しては．

$$F_1(dq, \sigma_0) \ll (\log L)^{c_1}$$

となる。

さて．このLemmaから容易に次のLemmaを得る。

<u>Lemma 9.3</u>

ある定数c_2が存在して

$$S_0 = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leqq d \leqq X}^{*} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1-2\delta)}{F^2(dq, 1-\delta)} \left(1-\delta \log \frac{X}{d}\right)^2 + O\left(\frac{\log^{c_2} L}{L^2}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leqq d \leqq X}^{*} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1-2\delta)}{F^2(dq, 1-\delta)} \left(\delta \log^2 \frac{X}{d} - \log \frac{X}{d}\right) + O\left(\frac{\log^{c_2} L}{L}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leqq d \leqq X}^{*} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1-2\delta)}{F^2(dq, 1-\delta)} \log^2 \frac{X}{d} + O\left(\log^{c_2} L\right)$$

$$S_0' = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leqq d \leqq X}^{*} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2\delta)}{F^2(dq, 1+\delta)} \left(1+\delta \log \frac{X}{d}\right)^2 + O\left(\frac{\log^{c_2} L}{L^2}\right)$$

$$S_1' = \frac{-1}{\log^2 X} \sum_{1 \leqq d \leqq X}^{*} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2\delta)}{F^2(dq, 1+\delta)} \left(\delta \log^2 \frac{X}{d} + \log \frac{X}{d}\right) + O\left(\frac{\log^{c_2} L}{L}\right)$$

$$S_2' = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{1 \leqq d \leqq X}^{*} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2\delta)}{F^2(dq, 1+\delta)} \log^2 \frac{X}{d} + O\left(\log^{c_2} L\right)$$

上のLemmaにおいて、主要項はすべて

$$\sum_{1\leq d\leq X}^{*} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d, 1+2c\delta)}{F^2(dq, 1+c\delta)} \log^{\ell} \frac{X}{d} \quad (\ell=0,1,2,\ c=\pm 1)$$

の形の一次結合になっている。ここでは、Levinson［7］のLemma 3.11－3.13は直接用いることはできない。それゆえ、Lemma 9.2と同様の方法により評価する。

Lemma 9.4

$$\sum_{1\leq d\leq}^{*} \frac{\mu^2(d)}{d} \frac{F(d,1+2c\delta)}{F^2(dq,1+c\delta)} \log^{\ell} \frac{Y}{d} = \frac{1}{\ell+1} \frac{\log^{\ell+1} Y}{F(q,1)} + O(L^{\ell} \log^4 L)$$

が成立する。ただし、$\ell = 0, 1, 2$, $c=\pm 1$, $X \leqq Y \leqq 2X$ とする。

Lemma 9.3, 9.4により、

Proposition 9.5

C_3をある定数としたとき、

$$S_0 = \frac{1}{F(q,1)}\left(\frac{1}{\log X} - \delta + \frac{\delta^2 \log X}{3}\right) + O\left(\frac{\log^{C_3} L}{L^2}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{F(q,1)}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\delta \log X}{3}\right) + O\left(\frac{\log^{C_3} L}{L}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{F(q,1)} \frac{\log X}{3} + O(\log^{C_3} L)$$

$$S_0' = \frac{1}{F(q,1)}\left(\frac{1}{\log X} + \delta + \frac{\delta^2 \log X}{3}\right) + O\left(\frac{\log^{c_3} L}{L^2}\right)$$

$$S_1' = \frac{1}{F(q,1)}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\delta \log X}{3}\right) + O\left(\frac{\log^{c_3} L}{L}\right)$$

$$S_2' = \frac{1}{F(q,1)} \, \frac{\log X}{3} + O\left(\log^{c_3} L\right)$$

が成立する。

§10. Main Theorem の証明

$$F(q,1) = \frac{\varphi(q)}{q}$$

であるから，（8.1）と Proposition 9.5 により，

$$\frac{1}{U}\int_T^{T+U} \left|\psi H\left(\tfrac{1}{2}-\delta+it, \chi\right)\right|^2 dt$$

$$= \frac{L}{\log X}\left(-\frac{1}{2R} - \frac{1}{2R^2} - \frac{1}{4R^3}\right) + \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{\log X}{3L}\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{2} - \frac{1}{4R}\right) + e^{2R}\left(\frac{L}{\log X}\,\frac{1}{4R^3} + \frac{\log X}{3L}\,\frac{1}{4R}\right)$$

$$+ O\left(\frac{\log^{c_4} L}{L} + q^{\frac{1}{2}} X \tau L^3/U + q^{\frac{1}{2}} U L^3/T + q X L^2/\tau + q^{\frac{3}{2}} X^2\right) \tag{10.1}$$

が得られる。

ただし，$R = \delta L$ とおいた。

ここで

$$U = \frac{T}{q L^4}$$

$$X = \frac{\tau}{q^{\frac{5}{2}} L^8}$$

とおくと、上の剰余項は、 $O(\log^{c_4} L / L)$ となる。
さらに、$\varepsilon > 0$ に対して、

$$\log q \leqq (\log T)^{1-\varepsilon}$$

と仮定すると、

$$\frac{\log X}{L} = \frac{1}{2} + O_{\varepsilon}(L^{-\varepsilon})$$

であるから、(10.1) の主要項は、

$$F(R) + O(L^{-\varepsilon})$$

の形となる。ここに

$$F(R) = e^{2R}\left(\frac{1}{2R^3} + \frac{1}{24R}\right) - \frac{1}{2R^3} - \frac{1}{R^2} - \frac{25}{24R} + \frac{7}{12} - \frac{R}{12}$$

である。したがって、

$$\int_T^{T+U} \left| \psi H\left(\tfrac{1}{2} - \delta + it, \chi\right)\right|^2 dt = UF(R) + O(UL^{-\varepsilon}) \qquad (10.2)$$

したがって、(3.5)、(3.8) により、

$$N_G(D) \leqq \frac{UL}{2\pi} \frac{\log F(R)}{R} + O(UL^{1-\varepsilon})$$

となり、Levinson の場合と同様に、$R = 1.3$ とおくと、

$$\frac{\log F(R)}{R} < \frac{1}{3}$$

となる。これで Main Theorem の証明は終わった。

ABSTRACT

In this note , we extend the result of Levinson [7] to Dirichlet L-functions . Most of proof is similar but we intend to get the result uniformly on q (modulas of χ) , so some lemmas cannot be used . The proof of fundamental properties on L(s, χ) , which are analogue to an essential idea of Levinson , and announcement appear in Hilano [8] .

REFERENCES

[1] P.X.Gallagher A large sieve density estimate near $\sigma = 1$,Invent. Math. 11 (1970) 329-339

[2] A.F.Lavrik A functional equation for Dirichlet L-series and the problem of divisors in arithmetic progressions ,A.M.S. Transl.(2) 82(1969) 47-65

[3] A.F.Lavrik An approximate functional equation for the Dirichlet L-function , Trans. Moscow Math. Soc. 18(1968) 101-115

[4] Y.Motohashi On an approximate functional equation of Dirichlet L-function , Kokyuroku of Research Institute , Kyoto Univ. No.193(1973)

[5] K.Prachar Primzahlverteilung ,Springer (1957)

[6] Titchmarsh The theory of the Riemann zete-function , Oxford(1951)

[7] N.Levinson More than one-third of zeros of Riemann zeta-function are on line σ=1/2, Advanced in Math. 13(1974) 383-436

[8] T.Hilano On the distribution of zeros of Dirichlet's L-function on the line $\sigma = 1/2$, Proc. Japan Acad. 52(1976) 537-540